TỔNG HỢP

TUYỆT KỸ BẤM MÁY CASIO GIẢI PT - HPT - BPT



CẨM NANG CHO MÙA THI

Biên soạn: tháng 6 - 2015

LỜI GIỚI THIỆU

Xin chào tất cả các bạn !

Mình cũng là một học sinh đang theo đuổi ước mơ đại học như các bạn. Trong đề thi đại học môn toán, câu hệ phương trình là câu khó, khi chúng ta nghe thầy cô giảng bài hoặc đọc tài liệu thì hiểu cách làm nhưng ta vẫn cứ thắc mắc là *"tại sao "họ" lại làm được như vậy !!!"* Sách tham khảo hay thầy cô chỉ nêu cho chúng ta phương pháp - đường đi, rằng nếu bài cho thế này thì làm như thế kia ... còn chúng ta thì học xong nhưng vẫn hình như có gì đó còn *"mơ hồ ?!"*

Sau khi tham gia các diễn đàn học tập trên mạng, đọc tài liệu và tự mình tìm tòi, cuối cùng, mình đã tìm đến một số bài viết nói về sự hỗ trợ của máy tính CASIO trong việc giải hệ phương trình, mình đã cố gắng học và thực hành theo và hiện nay chiếc máy tính đã trở thành vũ khí đắc lực của mình trong việc tìm lời giải cho câu hệ phương trình.

Tuy máy tính không phải là một phương pháp thay thế cho giải hệ phương trình nhưng nó *"là kim chỉ nam mang tính chất định hướng cách làm đặc biệt nó rất mạnh cho việc phân tích 1 phương trình thành tích và hỗ trợ cho phương pháp hàm số"*

Tính năng SOLVE trên máy tính rất hay - nếu biết khai thác để phục vụ cho học tập thì nó thật sự thú vị đấy !

Mấy tuần cuối vừa ôn thi, mình dành thời gian ngồi biên soạn và tổng hợp lại những gì mình *"thu nhặt"* được từ các nguồn trên mạng Internet để chia sẻ cùng các bạn đang ôn thi như mình. Mình quyết định biên soạn cuốn tài liệu "Tổng hợp tuyệt kỹ bấm máy CASIO giải PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH" .

Theo mình - tài liệu này chỉ thật sự là bổ ích với các bạn có tinh thần quyết tâm đỗ ĐH, muốn chinh phục câu HPT và đã có các kỹ năng cơ bản về biến đổi và giải HPT.

Hy vọng với tài liệu của mình, các bạn sẽ có thêm 1 cuốn cẩm nang mới, có một cách tiếp cận bài bản, khoa học và rõ ràng hơn đối với việc sử dụng máy tính hỗ trợ giải HPT và sẽ kiếm trọn vẹn 1,0 điểm đối với câu HPT trong kỳ thi sắp tới.

TÁC GIẢ

Dạng 1: CÁC MỐI QUAN HỆ ĐƯỢC RÚT RA TỪ 1 PHƯƠNG TRÌNH

Chúng ta cùng khởi động bằng một bài dễ trước nhé

Ví dụ 1: (CĐ-2014) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \ (1) \\ x^2-xy-2y^2=-x+2y \ (2) \end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

CÁCH 1

** Nhận xét chung:*

- Hệ gồm 2 phương trình 2 ẩn, điều đặc biệt là ở chỗ 1 phương trình có thể biến đổi được còn 1 hệ thì không có gì mà biến đổi *(nhìn qua các bạn sẽ thấy như vậy)*

- Vậy dàn ý chung là: từ phương trình biến đổi được đưa ra mối quan hệ x và y rồi thế vào phương trình không biến đổi được

- Bằng giác quan ta sẽ tìm cách nào đó để xử lý phương trình số (2), các bạn đa số là sẽ cứ viết - dùng đủ mọi cách nhóm và rồi tự dưng nó ra

- Ở đây, mình sẽ trình bày 1 phương pháp để lấy căn cứ biến đổi như sau:

Sử dụng tính năng Solve:

+ Nhập nguyên phương trình số 2: $X^2-XY-2Y^2=-X+2Y$

Ấn trên máy:

Alpha X x^2 - Alpha X Alpha Y – 2 Alpha Y x^2 Alpha = (dấu = màu đỏ nhé) - alpha X + 2 alpha Y

Giải thích "Alpha X, Alpha Y" là gọi biến X, biến Y nhưng với máy tính thì mặc định X là biến, Y là tham số

+ Sau đó các bạn bấm: **Shift Solve**

+ Máy hiện : Y? ← tức là máy hỏi ban đầu cho Y bằng mấy để còn tìm X

+ Các bạn khởi tạo giá trị ban đầu cho Y là 0 bằng cách nhập: 0 =

+ Nếu máy hỏi **"Solve for X"** thì các bạn ấn dấu " = " nhé

+ Bây giờ máy sẽ xử lý, việc của mình là đợi chờ.

Máy hiện:

X =	0 tử là khi y = 0 thì có nghiệm x = 0 *(có bạn sẽ được nghiệm -1 nhưng không sao)*
L - R =	0 sai số của nghiệm là 0

- Rồi vậy là được Y = 0 thì X = 0

- Tiếp theo các bạn ấn *"mũi tên chỉ sang trái"* để quay trở về phương trình

Lại bắt đầu khởi tạo giá trị ban đầu Y=1, máy lại tính ra X = 2

* Cứ như vậy tới Y = 5 thì được các kết quả như sau: ***(bảng 1)***

Y	0	1	2	3	4	5
X	0 hoặc -1	2 hoặc -2	-3	-4	-5	-6

- Các kết quả này hoàn toàn là do máy, từ khi Y = 2 tới Y = 5, ta thấy nó xuất hiện 1 quy luật gì đó.

- Rồi quay trởi lại thử Y = 1 thì nó cho ra 1 kết quả nghiệm khác vẫn của phương trình cũ

- Vì tính năng **Solve** là tính năng dò nghiệm theo công thức Newton nên nó sẽ tìm nghiệm gần với giá trị biến hiện tại của X .

- Từ Y = 2 ta thấy nó xuất hiện 1 quy luật gì đó, dễ dàng nhận thấy là $x+y+1=0$

- Vậy ta sẽ biến đổi phương trình (2) theo xem được không:

$$x^2-xy-2y^2=-x+2y \Leftrightarrow x^2-xy-2y^2+x-2y=0$$
$$\Leftrightarrow x(x+y+1)-2xy-2y^2-2y=0 \Leftrightarrow x(x+y+1)-2y(x+y+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2y)(x+y+1)=0$$

- Vậy nghiệm vừa rồi bị nhiễu là do $x-2y=0$

- Còn lại thì dễ dàng rồi nào: $\left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=-(y+1) \end{array}\right.$ thế vào phương trình đầu tiên

* x = 2y thì: $4y^2+2y^2+y^2=7 \Leftrightarrow y=\pm 1$

* x = -(y + 1) thì các bạn tự xử lý nhé

Bạn cứ làm thử theo cách mình mô tả đi nhé - nói thì dài thôi chứ lúc làm thì nhanh lắm !!!

CÁCH 2 : *Cách này tuy phức tạp hơn nhưng kiểm soát được toàn bộ nghiệm*

- Với Y = 0 ta đã tìm được một nghiệm X = 0
- Để xem phương trình có còn nghiệm nào khác hay không, các bạn làm như sau:
+ Ấn mũi tên sang ngang sửa phương trình thành $\left(X^2-XY-2Y^2+X-2Y\right):(X-0)$
+ Phương trình này để bỏ nghiệm vừa tìm được và tìm nghiệm mới
+ Sau đó, bấm lại như ban đầu thì tìm được X = - 1
+ Sau đó lại ấn $\dfrac{X^2-XY-2Y^2+X-2Y}{(X-0)(X+1)}$
+ Sau đó lại bấm giải nghiệm thì máy báo **"Can't solve"** tức là vô nghiệm hay hết nghiệm rồi. Vậy là được Y = 0 thì X = 0, X = - 1
+ Tiếp theo các bạn ấn "mũi tên chỉ sang trái" để quay trở về phương trình. Ta lại phải sửa phương trình thành $X^2-XY-2Y^2+X-2Y$
- Lại bắt đầu khởi tạo giá trị ban đầu Y = 1, X = 0 thì máy lại tính ra X = 2 hoặc (-2).
Cứ như vậy tới Y = 5 thì được kết quả như sau : ***(bảng 2)***

Y	0	1	2	3	4	5
X	0 hoặc (-1)	2 hoặc (-2)	(-3) hoặc 4	(-4) hoặc 6	(-5) hoặc 8	(-6) hoặc 10

Cách này tuy đầy đủ nhưng sẽ rất mất thời gian chỉnh sửa phương trình nên trong tài liệu đa phần mình sẽ giải bằng cách 1, vì những bài thi ĐH không quá phức tạp.

CÁCH 3: ***Để tìm nghiệm khác ngoài 1 nghiệm tìm được***

- Ví dụ khi Y = 0, lúc máy hỏi **"Solve for X"** các bạn ấn 0 = sẽ tìm được nghiệm X = 0
- Các bạn ấn **"-9 ="** thì sẽ được nghiệm X = - 1
- Các bạn ấn **"9 ="** thì sẽ được nghiệm X = 0

Vậy là ta đã tìm được ngay 2 nghiệm X = - 1 và X = 0 khi Y = 0

Mình rất hay dùng cách 1 cho hệ và cách 3 cho phương trình 1 ẩn, để tăng tốc độ làm bài

- Các kết quả này hoàn toàn là do máy, từ bảng 1 ta thấy khi Y = 2 tới Y = 5 ta thấy nó xuất hiện 1 quy luật gì đó. Tại Y = 0, Y = 1 không xuất hiện quy luật do có nhân tử khác gây nhiễu bởi vì tính năng **Solve** là tính năng dò nghiệm theo công thức **Newton** nên nó sẽ tìm nghiệm gần với giá trị biến hiện tại của X, ở đây các TH chúng ta đều khởi tạo giá trị ban đầu X = 0.
- Từ Y = 2 ta thấy nó xuất hiện 1 quy luật gì đó, dễ dàng nhận thấy là x + y + 1 = 0. Vậy ta sẽ biến đổi phương trình 2 theo xem được không:

Thêm bớt để ép nhân tử :

$$x^2 - xy - 2y^2 = -x + 2y \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 + x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+y+1) - 2xy - 2y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x(x+y+1) - 2y(x+y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x+y+1) = 0$$

- Vậy nghiệm vừa nãy bị nhiễu là do x - 2y = 0
- Còn lại thì dễ dàng rồi nào: $\left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = -(y+1) \end{array}\right.$ thế vào phương trình đầu tiên

* x = 2y thì: $4y^2 + 2y^2 + y^2 = 7 \Leftrightarrow y = \pm 1$

* x = -(y + 1) thì các bạn tự xử lý nhé

Tiếp tục nhé, nâng level lên nào !

Ví dụ 2: **(KB-2014)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} \ (1) \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} \ (2) \end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

* Nhận xét chung

- Thấy ngay phương trình số (2) khó biến đổi, phương trình (1) có vẻ dễ hơn , vậy ta thử xem nào

Lưu ý ở bài này: điều kiện phương trình (1) là $x \geq y$ bởi vậy lúc khởi tạo giá trị ban đầu **"Solve for X"** các bạn phải nhập số lớn hơn Y, chẳng hạn là **"9 ="** . Tại sao lại thế ?

Vì nếu bạn cho Y = 3 mà giá trị ban đầu X = 2 thì máy sẽ có 2 kiểu dò nghiệm

- Kiểu 1 là : $2 \to 2{,}1 \to 2{,}2 \to 2{,}3 \to \ldots.$
- Kiểu 2 là : $\ldots. \leftarrow 1{,}7 \leftarrow 1{,}8 \leftarrow 1{,}9 \leftarrow 2$

Nhưng đi theo đường nào thì $\sqrt{x-y}$ cũng không xác định ngay, do đó máy dừng dò nghiệm và báo **"Can't Solve"**

- Do đó phải khởi tạo giá trị ban đầu của X lớn hơn Y
- Các bạn làm tương tự, mình cho kết quả luôn:

Y	0	1	2	3	4	5
X	1	2	3	4	5	6

- Dựa vào bảng ta thấy luôn : $x-y=1$ hoặc $\sqrt{x-y}=1$

Vậy là đầu tiên mình đi theo hướng "x - y - 1 = 0" trước vì vế phải có sẵn rồi kìa, chỉ cần biến đổi những số còn lại xem có được không là chuyển hướng luôn!

$$(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow (1-y)\sqrt{x-y}+x-2-(x-y-1)\sqrt{y}=0$$
$$\Leftrightarrow (1-y)\sqrt{x-y}+(x-y-1)+(y-1)-(x-y-1)\sqrt{y}=0$$
$$\Leftrightarrow (1-y)\left[\sqrt{x-y}-1\right]+(x-y-1)\left[1-\sqrt{y}\right]=0$$

- Tới đây tự nhủ sao mà may thế - có lẽ là ý trời !

$$PT \Leftrightarrow (1-\sqrt{y})(\sqrt{x-y}-1)\left[\left(1+\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x-y}+1\right)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-y}-1=0\\ 1-\sqrt{y}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y+1\\ y=1\end{array}\right.$$

Thế vào phương trình (2) rồi xử tiếp nào:

- Với y = 1 thì 9 - 3x = 0 $\Rightarrow$ x=3

- Với y = x - 1 thì $2y^2-3(y+1)+6y+1=2\sqrt{1-y}-\sqrt{1-y} \Leftrightarrow 2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}$

- Tới đây mình suýt khóc cái vì cái phương trình siêu chuối này, nhưng hãy nghĩ về ước mơ đại học nên ta sẽ huy động mọi thứ thấy ! . Từ nãy giờ cái điều kiện chưa động đến $y \geq 0$ mà bây giờ lại có $y \leq 1$. Vậy $y \in [0;1]$

- Dễ thấy VP đồng biến với điều kiện trên, VT thì nghịch biến, các bạn tính đạo hàm ra sẽ thấy nên nếu phương trình có nghiệm thì sẽ là nghiệm duy nhất

- Thử bấm máy coi nào: 2 alpha X x^2 + 3 alpha X - 2 Alpha = (màu đỏ) $\sqrt{\ }$ 1- alpha X

- Sau đó bấm **Shift solve 0,5 =**

Phải dùng biến X nhé - mà máy nó mặc định như vậy rồi !

- Ta đang tìm X trong khoảng [0;1] mà nên phải khởi tại giá trị ban đầu X = 0,5 chẳng hạn được X = 0,618033…..
- Nếu x nguyên thì xong rồi đó nhưng đằng này có vẻ không còn may mắn nữa.
- Vậy Bộ giáo dục cố tình ra nghiệm lẻ để làm khó ta, nhưng mình đã có cách
Ta thử bình phương nghiệm X đó lên xem có đẹp không nhưng câu trả lời là không!
- Hi vọng nghiệm này không quá xấu, nó có dạng $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ là dạng nghiệm của phương trình bậc hai thì sẽ giải quyết được.

* Tư duy ở đây là: phương trình trên nếu bình phương lên sẽ ra bậc 4 đầy đủ nên có thể phân tích được thành : $(x^2+Sx+P)(x^2+S'x+P')$. Do đó ta chỉ cần tìm được 1 nhân tử (x^2+Sx+P) là xong, vậy ta cần tìm 3 trong 4 nghiệm.

- Về lý thuyết là như vậy nhưng thực tế mình tìm cả 4 nghiệm luôn.

- Bản chất của phương trình trên là bậc 4 nên ta sẽ bình phương lên để mất căn rồi chuyển sang một vế.

- Các bạn nhập lại phương trình thành (2 alpha X x^2+3 alpha X - 2)^2 - (1 - alpha X)

- Các bạn bấm dấu **"="** để lưu phương trình vào máy.

- Sau đó bấm **Shift solve 0 =**

Máy báo X = 0,3228….

- Sau đó các bạn bấm **RCL X Shift STO A** để lưu nghiệm X vừa tìm được vào A Vậy là được 1 nghiệm, để tìm nghiệm thứ 2 ta làm như sau:
- Nhấn nút đẩy lên 2 lần để tìm phương trình ta đã lưu
- Đưa mũi tên chỉ sang trái, sửa phương trình thành:

((2 alpha X x^2+3 alpha X - 2) ^{2} - (1- alpha X)): (X - A)

- Sau đó bấm **Shift solve**
- Máy hỏi A? 0,3228….. thì các bạn bấm dấu = Máy hiện **"Solve for X"** thì các bạn cũng ấn 0 =

Máy báo X = 0,6180

Các bạn ấm phím đẩy sang trái rồi ấn = để lưu lại phương trình

- Sau đó các bạn bấm **RCL X Shift STO B** để lưu nghiệm X vừa tìm được vào B
- Vậy đã có nghiệm thứ 2, các bạn lại ấn nút đẩy lên 2 lần, rồi đẩy sang trái để sửa phương trình tìm nghiệm thứ 3 các bạn lại sửa thành

((2 alpha X x^2+3 alpha X - 2) ^{2} - (1- alpha X)): (X - A)(X - B)

Sau đó bấm **Shift solve = = 0=**

Được nghiệm thứ 3 là : X= -1,61803…..

- Các bạn ấm phím đẩy sang trái rồi ấn = để lưu lại phương trình

- Sau đó các bạn bấm **RCL X Shift STO C** để lưu nghiệm X vừa tìm được vào C

Tương tự phương trình tìm nghiệm thứ 4 :

((2 alpha X x^2+3 alpha X - 2) ^{2} - (1- alpha X)): (X - A)(X - B)(X - C)

Sau đó bấm **Shift solve = = = 0=**

- Các bạn sẽ được nghiệm thứ 4 là : X = -2,3228…

Vậy ta đã được 4 nghiệm là A, B, C, X

- Ta biết rõ ràng là nghiệm B = 0,618… là nghiệm của phương trình ban đầu nên ta sẽ xét các tích BA, BC, BX xem tích nào đẹp
- Thấy ngay: BC = - 1 và B + C = -1

Vậy phương trình chứa nghiệm B, C này là x^2+x-1 *(định lý Vi-et đảo)*

Đây chính là cách phân tích phương trình bậc 4 thành nhân tử với máy tính

Vậy ta sẽ cố nhóm để xuất hiện nhân tử này: với bài thì là y^2+y-1, ép nhân tử như sau:

$$2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}$$
$$\Leftrightarrow 2(y^2+y-1)+y-\sqrt{1-y}=0$$
$$\Leftrightarrow 2(y^2+y-1)+\frac{y^2-(1-y)}{y+\sqrt{1-y}}=0$$
$$\Leftrightarrow (y^2+y-1)(2+\frac{y^2+y-1}{y+\sqrt{1-y}})=0$$
$$\Leftrightarrow y^2+y-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}(tm)\rightarrow x=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}(loai) \end{array}\right.$$

Các bạn tự kết luận nhé!

Ví dụ 3: (KA - 2014) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} \end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

*Nhận xét chung:

- Vẫn thấy phương trình 1 dễ xơi hơn, chứ phương trình 2 khó biến đổi

Cứ đặt điều điện cho lịch sự đã: $\begin{cases} 2\le y\le 12 \\ x^2\le 12 \end{cases}$

* Mình cho bảng kết quả bấm máy luôn

Y	2	3	4	5	6	12	0
X	3,16	3	2,828	2,64	2,44	0	3,464=$\sqrt{12}$

Nhận xét chung là Y tăng thì X giảm

- Với Y = 2, Y = 4, Y = 5, Y = 6 thì kết quả xấu quá ta thử bình phương lên xem có sử dụng được không

Y	2	3	4	5	6	12	0
X^2	9,9999	9	8	7	6	0	12

- Tính tới 2, 3 kết quả đầu đã thấy số mình may rồi. Các cụ phù hộ thì phải khác chứ

- Nhận thấy $y+x^2=12$. Căn cứ vào phương trình 1 thì sẽ là $y=12-x^2$

- Làm sao để chứng minh điều này, dễ thấy không thể phân thích thành nhân tử như bài trước được. Giờ chỉ còn hàm số và đánh giá mà thôi

- Hàm số thì có tích x nhân y thế kia thì khó, chia đi thì vướng số 12 bên vế phải

- Vậy thử đánh giá, mà có 2 cái tích thì chỉ có Cô - si thôi

- Thế ta dùng máy thử luôn cho nhanh nhé. Chúng ta dùng mình năng CALC *"là chồng"* của SLOVE.

- Các bạn nhập nguyên vế trái vào: $x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}$

Alpha X $\sqrt{\ }$ 12 – alpha Y + $\sqrt{\ }$ alpha Y – (12 – alpha X x^2)

Sau đó các bạn bấm CALC

- Máy hỏi là X? cho X bằng mấy ? bạn nhập 1 =

- Máy lại hỏi Y? cho Y bằng mấy ? bạn nhập vào là 11 hoặc tùy ý

X	1	1	2	2	3	3	4
Y	10	11	10	11	8	11	
Giá trị hàm	11,9	12	11,7	11,38	10,89	8,7	error

- Ta nhận thấy $VT \le 12 = VP$ vậy đánh giá là phương pháp đúng đắn, hehe !

- Áp dụng Bất đẳng thức Cô - si ta được:

$$x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)} \le \frac{x^2+(12-y)}{2}+\frac{y+(12-x^2)}{2}=12$$

- Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=\sqrt{12-y} \\ y=12-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y=12-x^2 \end{cases}$

- Thế vào phương trình 2 ta được: $x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$

- Lại bấm máy xem có nghiệm nguyên không nào, có thì coi như xong

- Các bạn bấm như sau: Alpha X Shift x^2 -8 Alpha X -1 = 2 $\sqrt{\ }$ 10 – alpha X x^2

- Sau đó ấn Shifl Solve 9 =

(nếu các bạn ấn 0 = sẽ bị ra nghiệm -1, nên phải ấn 9 = để tìm nghiệm dương - xem thêm cách 3 nhé).

- Ra được x = 3, tới đây có thể mỉm cười được rồi, các cụ phù hộ cho con cháu rồi !

- Ta sẽ biến đổi theo x - 3 = 0. Thật vậy :

$$x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow (x^3-8x-3)+2(1-\sqrt{10-x^2})=0$$

- Ta ghép 1 với $\sqrt{10-x^2}$ vì khi nhân liên hợp nó xuất hiện $x^2-9=(x-3)(x+3)$

- Tới đây các bạn vào máy giải phương trình bậc 3 kia xem được nghiệm gì nhé, đừng nói là bạn không biết bấm máy cái này ! Được x = 3 và 2 nghiệm xấu òm nhưng không sao, vậy là oke rồi

- Bạn tiến hành chia x^3-8x-3 cho (x - 3) được x^2+3x+1

Vậy ta có:

$$(x-3)(x^2+3x+1)+2(1-\sqrt{10-x^2})=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1)+2.\frac{x^2-9}{1+\sqrt{10-x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right]=0$$

- Ta có $x \geq 0$ nên cái hàm cồng kềnh này $x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}>0$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất x = y = 3

Ví dụ 4: (Trích đề thi thử THPT Quốc gia - 2015 - SGD Thành phố HCM):

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{y}+1\right)^2+\frac{y^2}{x}=y^2+2\sqrt{x-2} \ (1) \\ x+\frac{x-1}{y}+\frac{y}{x}=y^2+y \ (2) \end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

- Khi nhìn vào 2 phương trình này thì ta thấy phương trình số 2 dễ biến đổi hơn phương trình 1, bạn nào không nhìn ra điều này thì đi thử cả 2 phương trình cũng được.

Điều kiện: $x \geq 2; y>0$

- Các bạn nhập phương trình: $x+\frac{x-1}{y}+\frac{y}{x}=y^2+y$ như sau:

$$\text{Alpha X}+\frac{\text{AlphaX}-1}{\text{AlphaY}}+\frac{\text{AlphaY}}{\text{AlphaX}}=\text{Alpha Y x}^2+\text{Alpha Y}$$

Sau đó các bạn bấm: **Shift Solve** máy sẽ hiện " Y?" các bạn nhập 1 =

- Máy sẽ hiện **" Solve for X"** tức là khai báo giá trị ban đầu của X.
- Các bạn bấm " 0 = " . Máy sẽ trả về giá trị nghiệm X = 0,5. Vậy Y = 1 thì X = 0,5
- Để tìm nghiệm tiếp với Y = 2 thì các bạn bấm : **Shift Solve** máy sẽ hiện " Y?" các bạn nhập 2 =

Cứ như vậy với Y = 3,4,5 ta thu được bảng giá trị sau:

Y	1	2	3	4	5
X	0,5	$0,333...=\frac{1}{3}$	$0,25=\frac{1}{4}$	$0,2=\frac{1}{5}$	$0,1666...=\frac{1}{6}$

- Dựa vào bảng, ta thấy xuất hiện quy luật : $X=\frac{1}{Y+1} \Leftrightarrow XY+X-1=0$.

Ta sẽ ép để xuất hiện nhân tử trên như sau:

$$x+\frac{x-1}{y}+\frac{y}{x}=y^2+y \Leftrightarrow \frac{xy+x-1}{y}+\frac{y}{x}-y^2-y=0$$

$$\Leftrightarrow (xy+x-1)x+y^2-y^3x-xy^2=0 \Leftrightarrow (xy+x-1)x-y^2(xy+x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (xy+x-1)(x-y^2=0)\ (3)$$

- Rất may ở bài này chúng ta không bị nhiễu bởi nhân tử $x=y^2$ như ở bài 1.

- Với $x\ge 2, y>0 \Rightarrow xy+x-1>0$ nên từ (3) ta có $x=y^2$ thế vào phương trình (1) ta có:

$$\left(\sqrt{y}+1\right)^2+1=y^2+2\sqrt{y^2-2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{y}+1\right)^2=\left(y^2-1\right)+2\sqrt{y^2-2}+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}+1\right)^2=\left(\sqrt{y^2-2}+1\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y}+1=\sqrt{y^2-2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{y^2-1}$$

$$\Leftrightarrow y^2-y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1<0 \\ y=2 \Rightarrow x=4 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (4 ; 2)

Dạng 2: CÁC MỐI QUAN HỆ ĐƯỢC RÚT RA TỪ KẾT HỢP 2 PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+y)^3+4xy-3=0\ (1) \\ (x+y)^4-2x^2-4xy+2y^2+x-3y+1=0\ (2) \end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

Để xử lý dạng này, thì phải cộng (trừ) (1) với (2) nhân với k, đơn giản nhất là $k = 1$, có những bài phải cộng (trừ) đi $k=1,2,3,4,5...$ nhưng dạng này bây giờ khá hiếm, vì cũng khá là khó. Ở đây ta có:

$$(x+y)^4-2x^2-4xy+2y^2+x-3y+1+k\left[2(x+y)^3+4xy-3\right]=0$$

- Các bạn cứ thử $k=1,2,3,4,5...$ hoặc $-1;-2;-3;-4;-5;....$ cho tới Y nguyên thì X nguyên nhé. Ta được bảng giá trị sau:

Y	0	1	2	3	4	5
X	1	0	-1			

- Dễ thấy quy luật $x+y=1$. Ta biến đổi như sau:

$$(x+y)^4-2x^2-4xy+2y^2+x-3y+1+\left[2(x+y)^3+4xy-3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^4+2(x+y)^3-2x^2+2y^2+x-3y-2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3(x+y-1)+3\left[(x+y)^3-1\right]-2x^2+2(y^2-2y+1)+(x+y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3(x+y-1)+3\left[(x+y)^3-1\right]-2\left[x^2-(y-1)^2\right]+(x+y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left\{(x+y)^3+3\left[(x+y)^2+(x+y)+1\right]-2(x-1+1)+1\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\{(x+y)^3+3(x+y)^2+2+x+5y\}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x+y-1)=0\ (3)\\(x+y)^3+3(x+y)^2+2+x+5y=0\ (4)\end{array}\right.$$

- Lấy 2.(4) - (1) được:

$$6(x+y)^2+2x+10y+4-4xy+3=0 \Leftrightarrow 6(x^2+2xy+y^2)-4xy+2x+10y+7=0$$

$$\Leftrightarrow \left(5x^2+8xy+\frac{16}{5}y^2\right)+\left(x^2+2x+1\right)+\left[\frac{14}{5}y^2+10y+\left(\frac{25}{14}\right)^2\right]+7-1-\left(\frac{25}{14}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{5}+\frac{4}{\sqrt{5}}y\right)^2+(x+1)^2+\left[\sqrt{\frac{14}{5}}y+\frac{25}{4}\right]^2+6-\left(\frac{25}{4}\right)^2=0$$

- Do VT > 0 nên phương trình này vô nghiệm.

- Vậy $x+y-1=0$ thay vào (1) được: $2+4x(1-x)-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $x=y=\frac{1}{2}$

(bài này các bạn có thể tham khảo thêm phương pháp đánh giá)

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-11x-2y+9=0\ (1)\\4x^2-22x+21+y^3+3y^2+y=(2x+1)\sqrt{2x-1}\ (2)\end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

- Gợi ý: Bấm máy cả 2 phương trình Y nguyên → X ra lẻ → nghĩ tới dạng 2: kết hợp 2 phương trình

- Lấy (2) - k.(1) bấm máy với k = 1,2,3,4…. và Y = 0

$4x^2-22x+21+y^3+3y^2+y-(2x+1)\sqrt{2x-1}-k\left(2x^2-11x-2y+9\right)=0$

- Với k =1, Y = 0 → ra X = 9,… ra nghiệm xấu

- Với k = 2, Y= 0………. X = 1 quá đẹp, thử tiếp Y = 1 được X = 2,5

Vậy xong rồi. Ta có bảng giá trị sau:

Y	0	1	2	3	4	5
X	1	2,5	5	8,5	13	

- Chú ý là bài có căn thì phải bấm luôn với X như vậy xem căn bằng bao nhiêu có đẹp không?

- Dễ dàng suy ra được: $y+1=\sqrt{2x-1}$ *(muốn chứng minh điều này thì chỉ có dùng hàm số thôi)*, để ý vào phương trình nhé, cố ép sao về dạng hàm, thường người ta cũng sẽ gợi ý cho mình cứ x, y độc lập 2 vế thì nghĩ tới hàm số đầu tiên nhé.

- Lấy (2) - 2.(1) ta được:

$$y^3+3y^2+5y+3=(2x+1)\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(y^3+3y^2+3y+1\right)+2(y+1)=(2x-1)\sqrt{2x-1}+2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^3+2(y+1)=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\sqrt{2x-1}$$

- Xét hàm $f(t)=t^3+2t$ là xong, phần còn lại các bạn tự làm nhé.

*** Chú ý:** *Dạng 2 này mình chỉ mở rộng thêm còn chủ yếu anh tập chung vào dạng 1 vì có tới 90% các hệ trong đề thi thử và ĐH đều ở dạng 1, minh chứng là các ví dụ sau đây:*

Ví dụ 3: (KA-2013) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y \ (1) \\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 \ (2) \end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

- Điều kiện $x \ge 1$
- Ta có bảng kết quả với phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y$ (1)

Y	0	1	2	3	4	5
X	1	Can't	17	82	257	

- Dự đoán $y=\sqrt[4]{x-1}$
- Từ đó các em kết hợp với PP hàm số là ra đo *(x , y đứng độc lập nên nghĩ tới hàm số).*
- Ta biến đổi phương trình 1 thành: $\sqrt{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+y$
- Xét hàm: $f(t)=\sqrt{t^4+2}+t, t\ge 0 \Rightarrow f'(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}+1>0, \forall t\ge 0$

$\Rightarrow$ do đó hàm đồng biến nên $y=\sqrt[4]{x-1}$

Thế vào phương trình (2) ta được: $y(y^7+2y^4+y-4)=0$ (3)

- Xét hàm $g(y)=y^7+2y^4+y-4 \Rightarrow g'(y)=7y^6+8y^3+1>0$ với $y\ge 0$
- Dễ thấy g(1) = 0 nên phương trình (3) có 2 nghiệm là y = 0 và y = 1 suy ra x = 1 và $x = 2$. Vậy hệ có 2 nghiệm là (1 ; 0) và (2 ; 1)

Ví dụ 4: (KB-2013) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 \ (1) \\ 4x^2-y^2+x+4=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} \ (2) \end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

- Ta có bảng kết quả với phương trình (1) là :

Y	0	1	2	3	4	5
X	-0,5	0	0,5	1	1,5	2

- Dễ dàng nhận ra quy luật là 2x + 1 = y, các bạn cứ ép để xuất hiện nhân tử (2x - y + 1) là được, thật vậy:

$$2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0$$
$$\Leftrightarrow x(2x-y+1)-2xy+2x-2y+y^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow x(2x-y+1)-y(2x-y+1)+2x-y+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y+1)(2x-y+1)=0$$

- Ở đây có 1 phần tử gây nhiễu là x - y + 1 nhưng mà cũng may là không ảnh hưởng lúc ta bấm máy. Vậy : $\left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=2x+1 \end{array}\right.$

* Với y = x + 1 thay vào phương trình (2) ta có: $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

- Các bạn bấm được ra 2 nghiệm là x = 0 và x = 1 chỉ cần khởi tạo giá trị ban đầu là

"-9 =" và **"9 ="** các bạn sẽ tìm được 2 nghiệm này vậy sẽ có nhân tử "x^2-x"

- Ta phân tích thành:

$$3\left(x^2-x\right)+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x\right)\left[3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\end{array}\right.$$

Vậy ta tìm được 2 nghiệm là (0 ; 1) và (1 ; 2)

* Với y = 2x + 1 thay vào phương trình (2) được:

$3-3x=\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}$ làm tương tự như trên được: $x\left(3+\frac{4}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+4}+2}\right)=0\Leftrightarrow x=0$

Vậy hệ có 2 nghiệm là (0 ; 1) và (1 ; 2)

Ví dụ 5: (KA-2012) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y\ (1)\\x^2+y^2-x+y=\frac{1}{2}\ (2)\end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

Gợi ý:

- Bảng kết quả với phương trình 1: $x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y\ (1)$ như sau:

Y	0	1	2	3	4	100
X	2	3	1,79 hoặc 4	-1 hoặc 5		102

- Bài này cũng có phần tử gây nhiễu cho việc bấm máy, nhưng ta vẫn tìm được là có nhân tử: x = y + 2 hoặc x - 1= y + 3 hoặc x - 2 = y hoặc x - 1 = y + 1 (*căn cứ vào bài mà chọn mối quan hệ thích hợp)*

- Rõ ràng x và y độc lập với nhau nên nghĩ nay tới phương pháp hàm số, các bạn biến đổi thành:

$$\left(x^3-3x^2+3x-1\right)-12\left(x-1\right)=\left(y^3+3y^2+3y+1\right)-12\left(y+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^3-12\left(x-1\right)=\left(y+1\right)^3+\left(y+1\right)$$

- Để xét hàm thì các bạn phải chú ý vào đoạn mà ta cần xét nhé, ở đây phải bám vào phương trình (2), BGD giải khá chi tiết rồi, mình chỉ định hướng cho các bạn thôi.

Ví dụ 6: (KA-2011) Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0\ (1)\\xy\left(x^2+y^2\right)+2=\left(x+y\right)^2\ (2)\end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

Gợi ý:

- Bảng kết quả với phương trình (2): $xy\left(x^2+y^2\right)+2=\left(x+y\right)^2\ (2)$

Y	0	1	2	3	4	5
X	-1,4141	1	0,5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

- Rõ ràng ta thấy phương trình có nhân tử $\left(xy-1\right)$ ta sẽ cố tính nhóm để xuất hiện nó:

$$(xy-1)(x^2+y^2)-(x^2+y^2)+2-(x+y)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2)+2(1-xy)=0$$
$$\Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2)=0$$

+ TH 1: xy = 1 : Các bạn tự làm vì đơn giản

+TH 2 : $x^2+y^2=2$ thay vào (1) được : $3y(x^2+y^2)-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$

- Các bạn bấm máy để tìm quy luật của phương trình này : $6y-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$

Y	0	1	2	3	4	5
X	0	1	0,5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

- Vậy lại có nhân tử $(xy-1)=0$, ta sẽ lại ép nhân tử :

$$6y-4xy^2+2x^2y-2(x+y)=0$$
$$\Leftrightarrow -2xy^2+x^2y-x+2y=0$$
$$\Leftrightarrow -2y(xy-1)+x(xy-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2y)(xy-1)=0$$

Tới đây thì dễ rồi, còn lại các bạn tự biến đổi tiếp nhé.

Ví dụ 7: (KA-2010) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 \ (1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \ (2)\end{cases}$

Hướng dẫn quy trình *(Đây là câu 10 điểm của đề ĐH 2010)*

- ĐK: $y\le\frac{5}{2}, x\le\frac{3}{4}$
- Bảng kết quả với phương trình (1): $(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0$

Y	0	0	2	3	-1	-2
X	1,11	0,866	0,5	1/3	1,3228	1,5
x^2	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	Can't solve	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$

- Dự đoán: $x^2=\frac{5-2y}{4}$ hoặc $2x=\sqrt{5-2y}$
- Để ý 2 vế x, y hoàn toàn độc lập nên ta sẽ lại áp dụng phương pháp hàm số:

$$(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 \Leftrightarrow \left[(2x)^2+1\right]\frac{x}{2}=\left[(5-2y)+1\right]\frac{\sqrt{5-2y}}{2}$$

- Xét hàm: $f(t)=(t^2+1)\frac{t}{2}=\frac{t}{2}(t^3+t)$ hàm này đồng biến biến trên do f'(t) > 0

$\Rightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = 5-2y \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{5-x}{2}$ thế vào (2)

$\Rightarrow 4x^2 + \left(\dfrac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7 = 0$ (3)

- Xét hàm $g(x) = 4x^2 + \left(\dfrac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-40} - 7$ trên đoạn $\left[0, \dfrac{3}{4}\right]$

$\Rightarrow g'(x) = 8x - 8x\left(\dfrac{5}{2} - 2x^2\right) - \dfrac{4}{\sqrt{3-4x}} = 4x(4x^2-3) - \dfrac{4}{\sqrt{3-4x}} \le 0$ nên hàm số nghịch biến.

- Mà $g(\frac{1}{2}) = 0$ nên $x = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của (3)

- Với $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 2$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$

* **Mở rộng:** Ngoài giải hệ phương trình, máy tính FX - 570 ES PLUS còn hỗ trợ rất tốt trong việc giải bất phương trình và phương trình bậc cao cũng như phương trình vô tỷ: Sau đây mình muốn bổ sung thêm 1 bài như vậy:

Ví dụ 8: Trích đề thi thử THPT chuyên Vinh lần 3 - 2015 ngày 17/5/2015
Giải bất phương trình : $3(x^2-1)\sqrt{2x+1} < 2(x^3 - x^2)$

Hướng dẫn quy trình

- ĐK: $x \ge \dfrac{1}{2}$, từ (1) $\Leftrightarrow (x-1)\left[3(x+1)\sqrt{2x+1} - 2x^2\right] < 0$

- Bấm máy giải nghiệm của phương trình: $3(x+1)\sqrt{2x+1} - 2x^2$
- Được 2 nghiệm là x = 6,464… và x = -0,464…
- Các bạn lưu ý và A và B, để ý rằng AB = -3 và A + B = 6 nên chắc chắn có nhân tử $x^2 - 6x - 3$. Ta sẽ cố gắng ép để có nhân tử:

$$\begin{aligned}
&3(x+1)\sqrt{2x+1} - 2x^2 \\
&= 3(x+1)\sqrt{2x+1} - 2(x^2-6x-3) - (12x+6) \\
&= 3\sqrt{2x+1}(x+1-2\sqrt{2x+1}) - 2(x^2-6x-3) \\
&= 3\sqrt{2x+1}\frac{(x+1)^2 - 4(2x+1)}{x+1+2\sqrt{2x+1}} - 2(x^2-6x-3) \\
&= 3\sqrt{2x+1}\frac{x^2-6x-3}{x+1+2\sqrt{2x+1}} - 2(x^2-6x-3)
\end{aligned}$$

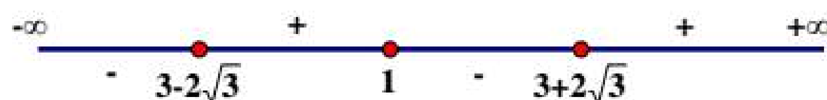
- Vậy ta có:

$$\begin{aligned}
&(x-1)(x^2-6x-3)(\frac{3\sqrt{2x+1}}{x+1+2\sqrt{2x+1}} - 2 < 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)(x^2-6x-3)\left[-\sqrt{2x+1} - 2(x+1)\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)(x^2-6x-3)\left[-(2x+1) - \sqrt{2x+1} - 1\right] < 0
\end{aligned}$$

- Mà: $-(2x+1) - \sqrt{2x+1} - 1 = -\left[(2x+1) + \sqrt{2x+1} + 1\right] = -\left[(\sqrt{2x+1} + \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4}\right] < 0$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2-6x-3) > 0$$

- Tới đây thì các bạn biểu diễn 3 nghiệm trên 2 trục số:



- Từ sơ đồ xét dấu và điều kiện ta có:

$$\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ x \in (3-2\sqrt{3};1) \cup (3+2\sqrt{3};+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3-2\sqrt{3};1) \cup (3+2\sqrt{3};+\infty)$$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $T = (3-2\sqrt{3};1) \cup (3+2\sqrt{3};+\infty)$

Ngoài ra còn 1 cách cũng khá hay nữa đưa phương trình về bậc 4 vì bản chất khi bình phương lên nó ra bậc 4 mà các bạn làm như phần mình hướng dẫn hệ khối B- 2014 để tìm 4 nghiệm *(ở bài này có 2 thôi, sau khi tìm ra được 2 nghiệm các bạn sử dụng Vi-et đảo ra 1 phương trình bậc 2, lấy phương trình bậc 4 ban đầu chia cho phương trình bậc 2 này là được phương trình bậc 2 vô nghiệm còn lại nhé)*

$$3(x+1)\sqrt{2x+1} - 2x^2 = 0$$
$$3(x+1)\sqrt{2x+1} = 2x^2$$
$$\Rightarrow 9(x+1)^2(2x+1) = 4x^4$$
$$\Leftrightarrow 9(x^2+2x+1)(2x+1) = 4x^4$$
$$\Leftrightarrow 9(2x^3+5x^2+4x+1) = 4x^4$$
$$\Leftrightarrow -4x^4+18x^3+45x^2+36x+9=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-6x-3)(-4x^2-6x-3)=0$$

- Từ đây ta thấy: $3(x+1)\sqrt{2x+1} - 2x^2 \Leftrightarrow (x^2-6x-3)(-4x^2-6x-3)$

Vậy kết hợp với đề bài ta sẽ có:

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-6x-3)(-4x^2-6x-3) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-6x-3) > 0$$

Ta kết luận tương tự như trên.

Tiếp theo là phần phương trình vô tỷ, vì là trong phần hệ mình đã nói kỹ phần giải phương trình vô tỷ ra nghiệm đẹp rồi và phương trình vô tỷ chỉ có 1 căn thức nghiệm xấu, bây giờ mình minh họa bài chứa 2 căn nhưng nghiệm xấu có thể coi là loại khó nhất người ta ra trong đề thi rồi, chứ nhiều căn mà có nghiệm đẹp như đề khối D-2014 thì quá đơn giản

Ví dụ 9: Giải phương trình vô tỷ của Sở GD Bắc Ninh thi ngày 21/5/2015

Giải phương trình: $3\sqrt{5x+4} + 3\sqrt{x+4} + 4x^2 - 18x - 12 = 0$

Hướng dẫn quy trình

Mình nghĩ đây là dạng khó nhất người ta có thể ra rồi, chủ yếu mình đưa câu này vào để trình bày 3 kỹ thuật chính tìm phương trình chứa nghiệm xấu hoặc tìm biểu thức ghép liên hợp, chứ thi mình nghĩ không ra khó tới mức này.

- Các bạn cứ đặt ĐK đàng hoàng đã: $x \ge -\dfrac{4}{5}$

- Bấm máy thôi: các bạn nhập phương trình: $3\sqrt{5x+4} + 3\sqrt{x+4} + 4x^2 - 18x - 12$ này vào, bấm dấu "=" để lưu lại đã.

- Tiếp theo các bạn bấm **Shift Solve 0 =**
- Máy cho ra luôn nghiệm X = 0, ta cần tìm tất cả các nghiệm, như mình đã hướng dẫn ở đề **KB-2014** đó.
- Sửa phương trình thành $\left(3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12\right):X$
- Tiếp theo các em bấm **Shift Solve =** được X = 3,797…

Các bạn lưu nghiệm này vào A

- Rồi lại sửa thành $\left(3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12\right):X(X-A)$
- Tiếp theo các bạn bấm **Shift Solve = =** cũng hơi lâu máy báo $X = 1.10^{-50}$ **nghiệm này xấp xỉ nghiệm 0, tức là vô nghiệm**.
- Vậy ta chỉ có 2 nghiệm thôi, làm sao để tìm được nghiệm lẻ nữa kết hợp với nghiệm lẻ kia để áp dụng Vi-et đảo, để tìm ra phương trình bậc 2 chứa nghiệm đó?

Phương trình vô tỷ họ rất hay cho 1 nghiệm lẻ, 1 nghiệm đẹp, 1 nghiệm lẻ bị loại do điều kiện nhằm gây khó khăn cho chúng ta.

*** Cách 1:** Mò phương trình tạo ra nghiệm lẻ kia :

- Nghiệm đó là nghiệm của 1 phương trình bậc 2 nào đó luôn có dạng : $ax^2+bx+c=0$
- Thông thường a =1, c nguyên nên chủ yếu là ta sẽ tìm b
- Ta đã lưu nghiệm lẻ vào A, bây giờ ta lưu lại vào X bằng cách **RCL A Shift STO X**

- Các bạn nhập như sau : $X^2+BX:B=B+1$
- Nhập như sau : Alpha X x^2 + Alpha B Alpha X Alpha: Alpha B Alpha = Alpha B + 1 Alpha
- Sau đó bấm **CALC** :
- Máy hiện **X? 3,79….** Các bạn ấn **=**
- Máy hiện **B? ……** Các bạn ấn **-9 =**
- Sau đó các bạn lại ấn **"="** cho tới khi nào các bạn nhìn thấy X^2+BX là một số nguyên

Ở đây mình bấm được là $B=-3$ khi đó $X^2+BX=3$

Vậy ta có $x^2-3x-3=0$ là nhân tử cần tìm.

Ta cũng cá thể dùng tính năng table cho nhanh - các bạn vào: **Mode 7**

- Máy hiện f(x) = các bạn nhập : A^2+XA **(X sẽ chạy mà, A là nghiệm) rồi ấn =**
- Máy hiện Start ? các bạn bấm -9 = (bắt đầu)
- Máy hiện End ? Các bạn bấm 9 = (Kết thúc)
- Máy hiện Step ? Các bạn bấm 1 = (Bước nhảy ví dụ từ 2 $\to$ 3 thì bước nhảy là 1)

+ Nhìn vào bảng ta thấy luôn **X = -3** thì **f(x) = 3** vậy $f(x)=A^2-3A=3$
+ Vậy ta có $x^2-3x-3=0$ là nhân tử cần tìm

Nếu mà không có giá trị đẹp thì các bạn lại sửa thành : $2A^2+XA, 3A^2+XA, ...$ mò mà, keke, nhưng thường như mình nói thôi hệ số của x^2 là 1.

*** Cách 2:** Mò biểu thức để ghép liên hợp: Các bài toán về căn như trên thường là ghép liên hợp, nhưng vấn đề là ghép với số nào?

Dạng chính là: $\begin{cases}\sqrt{5x+4}=ax+b\\ \sqrt{x+4}=a'x+b'\end{cases}$ ta phải đi tìm a, b, a', b' như sau:

- Ta có $\sqrt{5x+4}=ax+b$ *(cái này để tí ghép liên hợp đó)*

- Ta lại mò $\sqrt{5x+4}-ax$ khi nào nguyên thì dừng, ở đây ta dò được ngay a = 1, khi đó $\sqrt{5x+4}-ax=1$.

- Lưu ý là phải lưu nghiệm A = 3,79… sang nghiệm X = 3,79… nhé, xong bấm tương tự $\sqrt{x+4}-x=-1$.

Vậy ta có $\begin{cases}\sqrt{5x+4}-(x+1)=\dfrac{5x+4-(x^2+2x+1}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}=\dfrac{-(x^2+3x-3)}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}\\ \sqrt{5x+4}-(x-1)=\dfrac{5x+4-(x^2-2x+1}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}=\dfrac{-(x^2-3x-3)}{\sqrt{5x+4}+(x+1)}\end{cases}$

Thấy lợi hại chưa các bạn, mới đầu cũng sẽ thấy hơi khó khăn

* **Cách 3:** Đảo dấu : Mò nghiệm ngoại lai $\rightarrow$ phương trình nhân tử

Cơ sở của phương pháp này là khi ta nhân liên hợp, bình phương các kiểu ….

Bản chất vẫn là từ $\sqrt{a}\rightarrow a$ *tức là* $+\infty\rightarrow\infty$ *cái này làm xuất hiện nghiệm ngoại lai, muốn loại nghiệm ngoại lai ta kết hợp với ĐK ban đầu là vì vậy. Tức là trong quá trình bình phương hay nhân liên hợp vô tình tình đã tạo ra thêm phần tử âm từ 1 phần tử dương có giá triệt tuyệt đối như nhau nhưng khác dấu, hơi khó hiểu nhỉ.*

- Tức là $2\rightarrow 4\left\langle\begin{matrix}-2\\2\end{matrix}\right.$ hiểu đơn giản là như vậy

- Bởi vậy muốn tìm nghiệm ngoại lai đó chỉ cần giải các phương trình ngoại lai, nghiệm ngoại lai chỉ có tác dụng hỗ trợ việc giải phương trình mà không phải là nghiệm chính thống.

$$\text{Ta có: } \sqrt{5x+4}\rightarrow 5x+4\left\langle\begin{matrix}-\sqrt{5x+4}\\ \sqrt{5x+4}\end{matrix}\right. \text{ và } \sqrt{x+4}\rightarrow x+4\left\langle\begin{matrix}-\sqrt{x+4}\\ \sqrt{x+4}\end{matrix}\right.$$

- Nghiệm ngoại lai để mà kết hợp được với nghiệm X = 3,797….. ra đẹp sẽ là nghiệm của 1 trong số các phương trình ngại lai sau:

$$\begin{cases}-3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0\ (1)\\ 3\sqrt{5x+4}-3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0\ (2)\\ -3\sqrt{5x+4}-3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0\ (3)\end{cases}$$

- Các bạn lần lượt bấm nghiệm của phương trình (1), (2), (3) ra rồi nhân với X = 3,797….. **đã lưu ở A xem cái nào đẹp là nhận.**

+ (1) có nghiệm : **X = 5,402…** lưu vào B, nghiệm **X = - 0,5022….** Lưu vào C, có 2 nghiệm đó thôi thử tích AB, AC xem có đẹp không? Không đẹp thì sang phương trình (2)

+ (2) có nghiệm **X = - 0,7696……** lưu vào B, nghiệm **X = - 0,79128….** Lưu vào C, nghiệm **X = 6,76…..** lưu vào D hết nghiệm rồi, bây giờ ta xét các tích AB, AC, AD

Thấy ngay tích AC = -3 thử A + C = 3

+ (3) Không cần giải nữa

- Vậy ta có luôn phương trình chứa 1 nghiệm của phương trình ban đầu và nghiệm ngoại lai là $x^2-3x-3=0$

- Trong các cách này mình thấy nhanh nhất là cách 2, nhưng cần nhạy bén một chút, trâu bò nhất là cách 3 nhưng mà chắc ăn, vừa vừa thì dùng cách 1 cũng được.

Vậy là ta đã xác định được có nhân tử $x^2-3x-3=0$ bây giờ xác định lượng liên hợp cần ghép với các căn để ra được biểu thức này (đối với cách 1 + 3) chứ còn cách 2 thì xác định sẵn rồi còn đâu.

- Dùng luôn kết quả của cách 2 ta ghép như sau:

$$3\sqrt{5x+4}+3\sqrt{x+4}+4x^2-18x-12=0$$
$$\Leftrightarrow 3\left[\sqrt{5x+4}-(x+1)\right]+3\left[\sqrt{x+4}-(x-1)\right]+4(x^2-3x-3)=0$$
$$\Rightarrow \frac{-3(x^2-3x-3)}{x+1+\sqrt{5x+4}}+\frac{-3(x^2-3x-3)}{x-1+\sqrt{x+4}}+4(x^2-3x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-3x-3)\left(4-\frac{3}{x+1+\sqrt{5x+4}}-\frac{3}{x-1+\sqrt{x+4}}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-3=0 \\ g(x)=4-\dfrac{3}{x+1+\sqrt{5x+4}}-\dfrac{3}{x-1+\sqrt{x+4}}=0 \end{array}\right.$$

- Ta có:

$$g'(x)=\frac{3}{\left(x+1+\sqrt{5x+4}\right)^2}\left(1+\frac{5}{2\sqrt{5x+4}}\right)+\frac{3}{\left(x-1+\sqrt{x+4}\right)^2}\left(1+\frac{1}{x-1+\sqrt{x+4}}\right)>0,\forall x\ge\frac{-4}{5}$$

- Mà $g(0)=0\rightarrow x=0$ là 1 nghiệm duy nhất của g(x)

- Với : $x^2-3x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ thử lại chỉ có nghiệm $x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$ thỏa mãn

Vậy phương trình chỉ có 2 nghiệm là : x = 0 và $x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(4y^2+1)+2(x^2+1)\sqrt{x}=6 \ (1) \\ x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1} \ (2) \end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

- Bấm máy thấy phương trình (1) nghiệm quá lẻ.
- Chuyển phương trình (2), ta có bảng giá trị :

Y	0	1	2	3
X	(chờ quá lâu)	$0,5=\frac{1}{2}$	$0,25=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

- Dễ dàng thấy $XY=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2XY=1\Rightarrow$ có các khả năng sau : $\left[\begin{array}{l} 2xy-1=0 \\ 2y=\frac{1}{x} \end{array}\right.$

- Cơ sở để nghĩ tới 2y ? Các bạn để ý một chút ở phương trình (2) sẽ có 2 vế x, y gần như "độc lập" và hơi gần có dạng giống nhau là $t+\sqrt{t^2+1}\Rightarrow$ nó gợi ý ta dùng phương pháp hàm số.

- Tuy nhiên ở đây, tác giả sẽ hướng dẫn bạn theo cách ép nhân tử $2xy-1=0$ như sau:

$$x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow 2x^2y+2x^2y\sqrt{4y^2+1}=x+\sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x(2xy-1)+2x^2y\sqrt{4y^2+1}-\sqrt{x^2+1}=0\Leftrightarrow x(2xy-1)+\frac{4x^4y^2(4y^2+1)-(x^2+1)}{2x^2y\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow x(2xy-1)+\frac{(2xy)^4+4x^4y^2-x^2-1}{2x^2y\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow x(2xy-1)+\frac{(4x^2y^2)^2-1+x^2(4x^2y^2-1)}{2x^2y\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow x(2xy-1)+\frac{(4x^2y^2-1)(4x^2y^2+1+x^2)}{2x^2y\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow (2xy-1)\left[x+\frac{(2xy+1)(4x^2y^2+1+x^2)}{2x^2y\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}\right]=0$$

- Đến đây ta phải tìm cách chứng minh dấu ngoặc vuông phức tạp kia luôn dương !!!
+ Ta thấy rằng từ phương trình (1) thì $x\ge 0$
+ Từ phương trình (2) : $x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow y\ge 0$ (do $x\ge 0$)
+ Như vậy với $x\ge 0; y\ge 0$ thì $\left[x+\frac{(2xy+1)(4x^2y^2+1+x^2)}{2x^2y\sqrt{4y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}\right]>0\Rightarrow 2xy-1=0$

- Xét x = 0 không phải là nghiệm nên $x>0\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0$
- Từ phương trình (2) $\Rightarrow y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)>0$, chia 2 vế phương trình (2) cho x^2 ta được:

$$(2y)+(2y)\sqrt{(2y)^2+1}=\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\Leftrightarrow f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right) \ (3)$$

- Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}, t>0\Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến (4). Từ (3) và (4) $\Rightarrow 2y=\frac{1}{x}$

- Thay $2y=\frac{1}{x}$ vào (1) ta được $x^3+x+2(x^2+1)\sqrt{x}=6$ (5)

- Ta bấm máy thấy (5) có nghiệm duy nhất x = 1, vậy cần chứng minh hàm $f(x)=x^3+x+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}$ đơn điệu với $x>0$

+ Ta có $f'(x)=3x^2+x+4x\sqrt{x}+\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}>0,\forall x>0\Rightarrow f(x)$ là hàm đồng biến với x > 0.

+ Từ (5) và (6) vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của (5).

- Kết luận: hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$

Ví dụ 11: *(Đề thi thử THPT Quốc gia - THPT chuyên Vinh lần 4 - 2015)*

Giải bất phương trình $1+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^3\ge 0$

Hướng dẫn quy trình

+ ĐK: $x\ge 1$

+ Bước 1: Dùng solve ta tìm được x = 2 là nghiệm duy nhất, với nghiệm này thì :

$\begin{cases}\sqrt{x-1}=1\\ \sqrt{2x}=2\end{cases}$ vậy ta sẽ ép nhân tử để xuất hiện $(x-2)(...>0)$ hoặc $0<...)\ge 0$.

+ Ta làm như sau:

$$1+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^3\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}\left[\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^3+1\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x}{1+\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}+1\right)\left[\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)+1\right]\ge 0$$

+ Ta có: $\left[\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)+1\right]>0$ nên BPT tương đương:

$$\Leftrightarrow \frac{2-x}{1+\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x}-2+3-3\sqrt{x-1}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x}{1+\sqrt{x-1}}+\left[\frac{2(x-2)}{\sqrt{2x}+2}+\frac{3(2-x)}{1+\sqrt{x-1}}\right]\sqrt{x-1}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (2-x)\left(\frac{4}{1+\sqrt{x-1}}-\frac{2}{\sqrt{2x}+2}\right)\sqrt{x-1}\ge 0$$

+ Với $x\ge 1$ thì:

$$x+x\ge x+1>x-1\Leftrightarrow 2x>x-1\Leftrightarrow \sqrt{2x}>\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 2+\sqrt{2x}>2+\sqrt{x-1}>1+\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{1+\sqrt{x-1}}>\frac{2}{1+\sqrt{x-1}}>\frac{2}{\sqrt{2x}+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{1+\sqrt{x-1}}-\frac{2}{\sqrt{2x}+1}>0$$

+ BPT tương đương : $(2-x)\sqrt{x-1}\ge 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2$

Ví dụ 12: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-x-y-1}.\sqrt[3]{x-y-1}=y+1\ (1)\\ x+y+1+\sqrt{2x+y}=\sqrt{5x^2+3y^2+3x+7y}\ (2)\end{cases}$

Hướng dẫn quy trình

+ Một bài bấm máy thì dễ mà biến đổi thì toát mồ hôi hột

+ Dễ dàng dùng máy tính CASIO xét phương trình (1) ra được $x-y=2\Leftrightarrow x-y-2=0$

+ Giờ đến tiết mục kinh điển nhất mang tên "ép duyên"

$$\sqrt{x^2-x-y-1}.\sqrt[3]{x-y-1}=y+1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-y-1}.\left(\sqrt[3]{x-y-1}-1\right)=(y+1)-\sqrt{x^2-x-y-1}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-y-1}.\frac{x-y-2}{\sqrt[3]{x-y-1}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}=\frac{(y+1)^2-(x^2-x-y-1)}{(y+1)+\sqrt{x^2-x-y-1}}$$

$$\Leftrightarrow(x-y-2)\left(\frac{\sqrt{x^2-x-y-1}}{\sqrt[3]{x-y-1}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}\right)=\frac{(y+1+x)(y+1-x)+(x+y+1)}{(y+1)+\sqrt{x^2-x-y-1}}$$

$$\Leftrightarrow(x-y-2)\left(\frac{\sqrt{x^2-x-y-1}}{\sqrt[3]{x-y-1}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}\right)=\frac{(y+1+x)(-x+y+1)}{(y+1)+\sqrt{x^2-x-y-1}}$$

$$\Leftrightarrow(x-y-2)\left(\frac{\sqrt{x^2-x-y-1}}{\sqrt[3]{x-y-1}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}+\frac{x+y+1}{(y+1)+\sqrt{x^2-x-y-1}}\right)=0\ (*)$$

+ Từ (2) ta có $x+y+1=\sqrt{5x^2+3y^2+3x+7y}-\sqrt{2x+y}>0$ (các cụ phù hộ)

+ Do đó $(*)\Leftrightarrow x-y-2=0\Leftrightarrow y=x-2$ thay vào (2) ta được:

$2x-1+\sqrt{3x-2}=\sqrt{8x^2-2x-2}$, ĐK: $x\ge\frac{2}{3}$, bấm máy ra nghiệm x = 1 là nghiệm duy nhất, vậy em nó xác định rồi, không yêu cũng phải yêu.

+ Với x = 1 thì $\begin{cases}\sqrt{3x-2}=1\\ \sqrt{8x^2-2x-2}=2\end{cases}$

+ Ta có:

$$2x-1+\sqrt{3x-2}=\sqrt{8x^2-2x-2}\Leftrightarrow 2(x-1)+\sqrt{3x-2}-1=\sqrt{8x^2-2x-2}-2$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)+\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x-2}+1}=\frac{8x^2-2x-6}{\sqrt{8x^2-2x-2}+2}$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(2+\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}\right)=\frac{(x-1)(8x+6)}{\sqrt{8x^2-2x-2}+2}$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[2+\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}-\frac{2(4x+3)}{\sqrt{8x^2-2x-2}+2}\right]=0$$

+ Xét $f(x)=2+\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}-\frac{2(4x+3)}{\sqrt{8x^2-2x-2}+2},x\ge\frac{2}{3}$, tới đây bó tay chấm com rồi, bạn nào khỏe chứng minh f(x) < 0 dùm mình cái đi.

+ Tới đây mình đổi hướng: Hàm số không được mà lại có nghiệm duy nhất nên mình cay cú dùng BẤT ĐẲNG THỨC

+ Thử luôn : $2x-1=\sqrt{3x-2}=1, x=1$ được thì ăn cả, ngã về mo.

+ Bấm máy thấy $VP \geq VT$, mà VT có dạng tổng mà muốn $\leq$ thì chỉ có áp dụng $a+b \leq \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$ thôi, thật vậy:

$$2x-1+\sqrt{3x-2} \leq \sqrt{2\left[(2x-1)^2+3x-2\right]}=\sqrt{2\left(4x^2-x-1\right)}=\sqrt{8x^2-2x-2}$$

+ Tới đây thì xong rồi: $2x-1=\sqrt{3x-2}=1 \Leftrightarrow x=1$ (tự làm nhé)

+ Ngoài ra các bạn có thể bình phương 2 vế lên:

$4x^2-x-1+2(2x-1)\sqrt{3x-2}=8x^2-2x-2$

$\Leftrightarrow 4x^2-x-1-2(2x-1)\sqrt{3x-2}=0$

+ Có bạn nào nhìn ra được: $4x^2-x-1-2(2x-1)\sqrt{3x-2}=\left(2x-1-\sqrt{3x-2}\right)^2=0$, ke ke ...

+ Cuối cùng cũng được: $2x-1=\sqrt{3x-2}=1 \Leftrightarrow x=1$

TỔNG KẾT

Đây là 1 phương pháp giúp ta định hướng nhanh mối quan hệ giữa x và y, rất thích hợp áp dụng với các phương pháp phân tích thành nhân tử, phương pháp hàm số và đánh giá... Đặc biệt là khả năng sử dụng để giải phương trình, bất phương trình vô tỷ, phân tích phương trình bậc 4 thành nhân tử,...

Hi vọng sau tài liệu này các bạn sẽ có cái nhìn khác về HỆ PHƯƠNG TRÌNH, đã rất nhiều bạn có phản hồi lại cho mình là đã biết làm và làm rất tốt, không còn thấy hệ phương trình khó nữa.

Tháng 6 - 2015